

**DIFFRACTION ET DIFFUSION DE LUMIERE
THEORIE ET APPLICATIONS**

**CILAS (Compagnie Industrielle des Lasers)
8 avenue Buffon
45063 ORLEANS
Tél : 02 38 64 59 00
Fax : 02 38 64 59 07**

TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION.....	3
2. PROPAGATION D’UNE ONDE DANS LE VIDE	3
2.1. FORMULATION DE FRESNEL DU PRINCIPE DE HUYGENS	4
3. THEORIE DE LA DIFFRACTION.....	6
3.1. PRINCIPE DE BABINET	6
3.2. DIFFRACTION PAR UNE SURFACE OPAQUE	7
3.3. APPLICATION À LA MESURE DE PARTICULES SPHÉRIQUES DE GRANDE TAILLE PAR RAPPORT À LA LONGUEUR D’ONDE	8
3.3.1. <i>Diffraction d’une sphère</i>	8
3.3.2. <i>Paradoxe d’extinction</i>	9
3.3.3. <i>Diffraction de deux sphères</i>	10
3.3.4. <i>Granulométrie par mesure de la diffraction d’un mélange de plusieurs sphères de tailles différentes</i>	10
3.3.5. <i>Avantages et limites du modèle de diffraction</i>	11
4. DIFFUSION DE LUMIÈRE	12
4.1. RAPPEL DE DÉFINITIONS DE CALCUL VECTORIEL	12
4.1.1. <i>Gradient</i>	12
4.1.2. <i>Divergence</i>	12
4.1.3. <i>Laplacien</i>	13
4.1.4. <i>Rotationnel</i>	13
4.1.5. <i>Relations communes</i>	13
4.2. LES ÉQUATIONS DE MAXWELL	14
4.3. PROPAGATION D’UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN MILIEU SANS CHARGE ÉLECTRIQUE SPATIALE ET SANS COURANT	15
4.4. MODÉLISATION RIGOREUSE DE DIFFUSION : THÉORIE DE MIE	17
4.4.1. <i>Propagation des ondes</i>	17
4.4.2. <i>Conditions aux limites</i>	18
4.4.3. <i>Solution de Mie</i>	19
4.5. APPLICATION À LA MESURE DE PARTICULES DE PETITE TAILLE PAR RAPPORT À LA LONGUEUR D’ONDE - INFLUENCE DU MODÈLE SUR LES RÉSULTATS	22
4.6. THÉORIE DE RAYLEIGH	25
5. CONCLUSION	26

1. INTRODUCTION

La mesure de particules par diffraction laser, est une méthode largement répandue. CILAS fut la première société à étudier et réaliser des granulomètres laser. Les premiers brevets déposés par CILAS sur la granulométrie par laser sont maintenant dans le domaine public.

Cette méthode a un avantage considérable par le fait qu'elle est optique, rapide et donc permet en un temps court d'estimer la répartition granulométrique d'un échantillon statistiquement représentatif du lot à contrôler.

Ces instruments, qui au début permettaient de mesurer des particules dont la taille variait entre 2 µm et 100 µm permettent aujourd'hui de mesurer depuis le sub-micronique jusqu'à plusieurs millimètres.

Ces résultats ont été obtenus par l'exploitation de modèles de diffusion qui peuvent paraître mystérieux aux utilisateurs.

Cet exposé a pour but de permettre aux utilisateurs de mieux comprendre les méthodes utilisées et les fondements théoriques qui les justifient. Pour cela quelques rappels mathématiques et physiques seront faits, puis nous verrons, en fonction de la taille des particules à mesurer, comment la théorie doit devenir progressivement plus précise.

La mesure est basée sur l'interaction de la lumière sur des particules. Nous évoquerons la diffraction et la diffusion. La diffraction étant considérée dans cet exposé comme une forme particulière de diffusion de lumière due à la présence d'un obstacle totalement opaque sur le trajet. Nous devons tout d'abord examiner la propagation de la lumière. Nous n'utiliserons que la nature ondulatoire de la lumière au cours de nos démonstrations.

2. PROPAGATION D'UNE ONDE DANS LE VIDE

Les ondes considérées sont issues de lasers. En conséquence, elles sont monochromatiques et cohérentes, c'est à dire sont constituées d'ondes de fréquence unique ou de fréquences très faiblement dispersées, en phase à l'émission.

Nous pouvons exprimer une onde laser périodique sous la forme :

$$A(t, z) = a \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$$

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

$$\omega = k \cdot c$$

avec :

a : amplitude.

t : temps.

z : distance.

k : nombre d'onde.

l : longueur d'onde.

c : vitesse de la lumière.

ω : pulsation (ou fréquence circulaire égale à $2 \cdot \pi \cdot f$).

L'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude. Nous appellerons intensité le flux énergétique par unité de surface.

Par commodité, nous utiliserons la notation complexe. Nous pouvons alors écrire :

$$A(t, z) = \text{Re}\left(a \cdot e^{-i.k.z+i.\omega.t}\right)$$

Re signifiant partie réelle.

L'intensité est proportionnelle à $|A|^2$ avec

$$|A|^2 = A \cdot A^* = a^2$$

2.1. Formulation de Fresnel du principe de Huygens

Définissons un front d'onde comme étant le lieu de points voisins dont la phase est identique
La propagation d'une onde a été formulée par Huygens de la manière suivante :

Chaque point du front d'onde est considéré comme une source élémentaire émettant une onde sphérique. Le front d'onde suivant est obtenu par l'enveloppe des ondes produites par toutes ces sources élémentaires selon le schéma de la figure 1 :

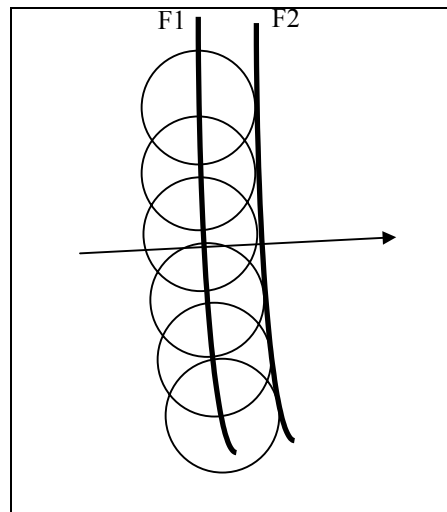


figure 1

Fresnel, exploitant le principe des interférences découvert par Young a formulé une expression analytique de la manière suivante :

Faisons l'hypothèse que la distance entre les deux fronts d'onde considérés soit l telle que $k.l \gg 1$. Appelons dS un élément du front d'onde F_1 , et considérons la perturbation produite par cette surface sur un point situé à la distance r de la surface. Elle est égale à :

$$p \cdot dS \frac{e^{-i.k.r}}{r} \cdot u_1 \quad (1)$$

p étant un facteur constant, et u_1 étant la valeur de l'onde sur le front d'onde F_1 . Nous supposons $dS=dx.dy$ tel que $dx \ll l$ et $dy \ll l$.

On peut alors écrire :

$$r \approx l + \frac{1}{2.l} (x^2 + y^2)$$

Selon le principe de Huygens, nous obtenons :

$$u_2 = \frac{p}{l} e^{-i.k.l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 \cdot e^{\frac{-i.k.(x^2+y^2)}{2.l}} \cdot dx \cdot dy$$

en résolvant cette équation, nous obtenons :

$$u_2 = \frac{p}{l} e^{-i.k.l} \cdot u_1 \cdot (-i.l \cdot \lambda)$$

or

$$u_2 = e^{-i.k.l} \cdot u_1$$

on en déduit le coefficient p par identification entre ces deux dernières équations, ce qui permet d'exprimer la perturbation due à un élément de surface dS à partir de l'équation (1) :

$$\frac{i}{\lambda} \cdot dS \frac{e^{-i.k.r}}{r} \cdot u_1$$

ou encore

$$u_1 \frac{e^{-i.k.r+i.\frac{\pi}{2}}}{r \cdot \lambda} \cdot dS \quad (2)$$

Ainsi, pour calculer l'amplitude du front d'onde F2 à la distance l du front d'onde F1, tout se passe comme si l'élément de surface le plus proche de surface $l \cdot \lambda$ sur le front d'onde F1 contribuait à cette amplitude avec une phase égale tandis que le reste du front d'onde F1 n'avait aucun effet.

3. THEORIE DE LA DIFFRACTION

3.1. Principe de Babinet

Supposons deux expériences :

Dans le premier cas (figure 2), le front d'onde F1 est occulté par un disque opaque de surface S. Il en résulte à la distance l un front d'onde F2.

Dans le second cas (figure 3), le front d'onde F1 est occulté par un écran opaque dans lequel est percé un trou de surface S identique à celle du premier cas. Il en résulte à la distance l un front d'onde F'2.

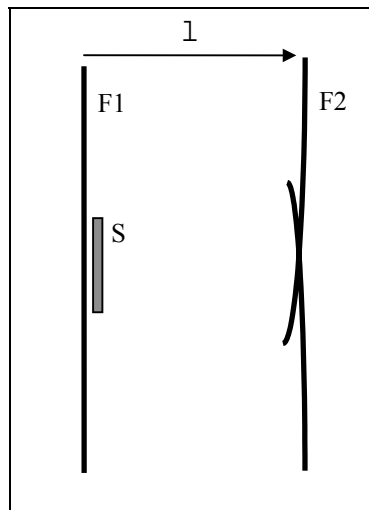


figure 2

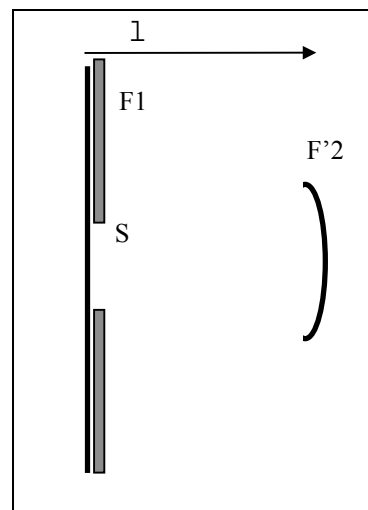


figure 3

Nous pouvons utiliser la formulation de Fresnel du principe de Huygens pour calculer les effets de la diffraction. Si nous superposons F2 et F'2, on obtient un front d'onde non perturbé comme si F1 n'avait pas rencontré d'obstacle. **On en déduit que les perturbations sont identiques et de signe opposé entre les deux expériences.**

L'effet de diffraction est donc le même au signe près, qu'il s'agisse d'un trou ou d'une obstruction.

Par ailleurs, l'effet de diffraction produit par une sphère de même diamètre que le disque de surface S serait aussi le même.

3.2. Diffraction par une surface opaque

Reportons nous à la figure 4. Appelons θ l'angle de diffusion par rapport à la direction incidente du rayonnement et φ , l'azimut de la direction de diffusion. Nous appellerons R_0 la distance du point P au centre de la surface S , et $R(x,y)$ la distance du point P à un point quelconque de coordonnées (x,y) de la surface S .

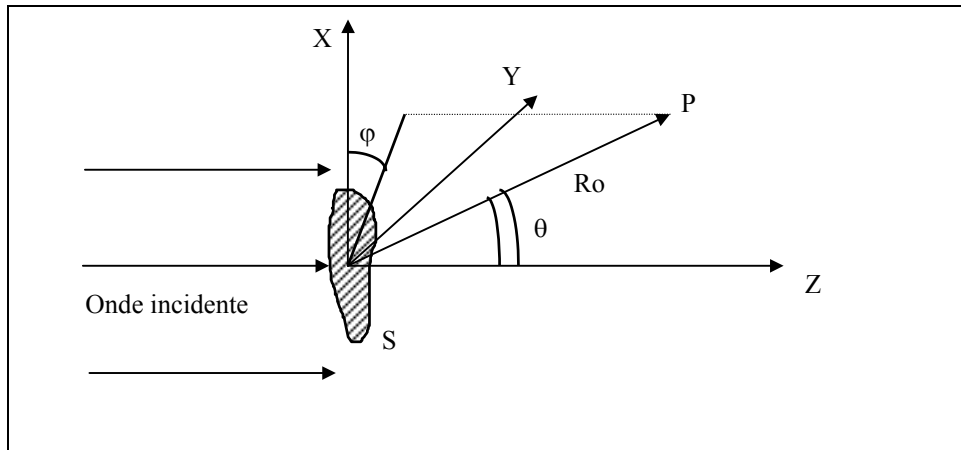


figure 4

Selon les conventions de notation, nous pouvons écrire si $x \ll R_0$ et $y \ll R_0$:

$$R(x,y) = R_0 - (x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi)) \cdot \sin(\theta)$$

En appliquant le principe de Babinet et en intégrant l'équation (2), nous obtenons :

$$u_P = u_S \cdot \left(e^{-i \cdot k \cdot z} - \frac{1}{R_0 \cdot \lambda} \cdot e^{-i \cdot k \cdot R_0 + i \frac{\pi}{2}} \cdot \iint_S e^{i \cdot k \cdot (x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi)) \cdot \sin(\theta)} \cdot dx \cdot dy \right)$$

Le premier terme correspond à la propagation de l'onde sans obstacle, le second à la perturbation due à la surface opaque.

en effectuant un changement de variable inversant les signes de x et de y , nous obtenons :

$$u_P = u_S \cdot \left(e^{-i \cdot k \cdot z} - \frac{1}{R_0 \cdot \lambda} \cdot e^{-i \cdot k \cdot R_0 + i \frac{\pi}{2}} \cdot \iint_S e^{-i \cdot k \cdot (x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi)) \cdot \sin(\theta)} \cdot dx \cdot dy \right)$$

En appelant S_0 l'aire de la surface opaque, l'intensité diffractée est le carré du module de l'amplitude diffractée qui s'exprime :

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{S_0^2}{R_0^2 \cdot \lambda^2} \cdot \left| \frac{1}{S_0} \cdot \iint_S e^{-i.k.(x.\cos(\varphi)+y.\sin(\varphi)).\sin(\theta)} \cdot dx \cdot dy \right|^2 \right) \quad (3)$$

Nous pouvons remarquer dans l'équation (3), l'expression $F(\theta, \varphi)$ telle que :

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1}{S_0} \cdot \iint_S e^{-i.k.(x.\cos(\varphi)+y.\sin(\varphi)).\sin(\theta)} \cdot dx \cdot dy \quad (4)$$

Soient X et Y coordonnées du point P dans le repère $x O y$, nous pouvons écrire :

- $X = R_0.\sin(\theta).\cos(\varphi)$
- $Y = R_0.\sin(\theta).\sin(\varphi)$

L'équation (4) devient :

$$F(X, Y) = \frac{1}{S_0} \cdot \iint_S e^{-i.\frac{k}{R_0}.(x.X+y.Y)} \cdot dx \cdot dy$$

Nous reconnaissons dans cette équation la transformée de Fourier $F(X, Y)$ de la surface S .

3.3. Application à la mesure de particules sphériques de grande taille par rapport à la longueur d'onde

3.3.1. Diffraction d'une sphère

Dans le cas d'un disque ou d'une sphère de rayon a , S est un cercle de rayon a . En intégrant la formule (4), nous obtenons :

$$|F(\theta, \varphi)| = \frac{2.J_1(k.a.\sin(\theta))}{k.a.\sin(\theta)}$$

Nous constatons que cette fonction est indépendante de φ . En utilisant ce résultat dans l'équation (3), nous obtenons :

$$I = I_0 \cdot \frac{S_0^2}{R_0^2 \cdot \lambda^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot J_1(k \cdot a \cdot \sin(\theta))}{k \cdot a \cdot \sin(\theta)} \right)^2$$

J_1 étant la fonction de Bessel d'ordre 1.

La fonction $|F(\theta, \varphi)|^2$ a l'allure suivante pour $k \cdot a = 5$ et $k \cdot a = 10$:

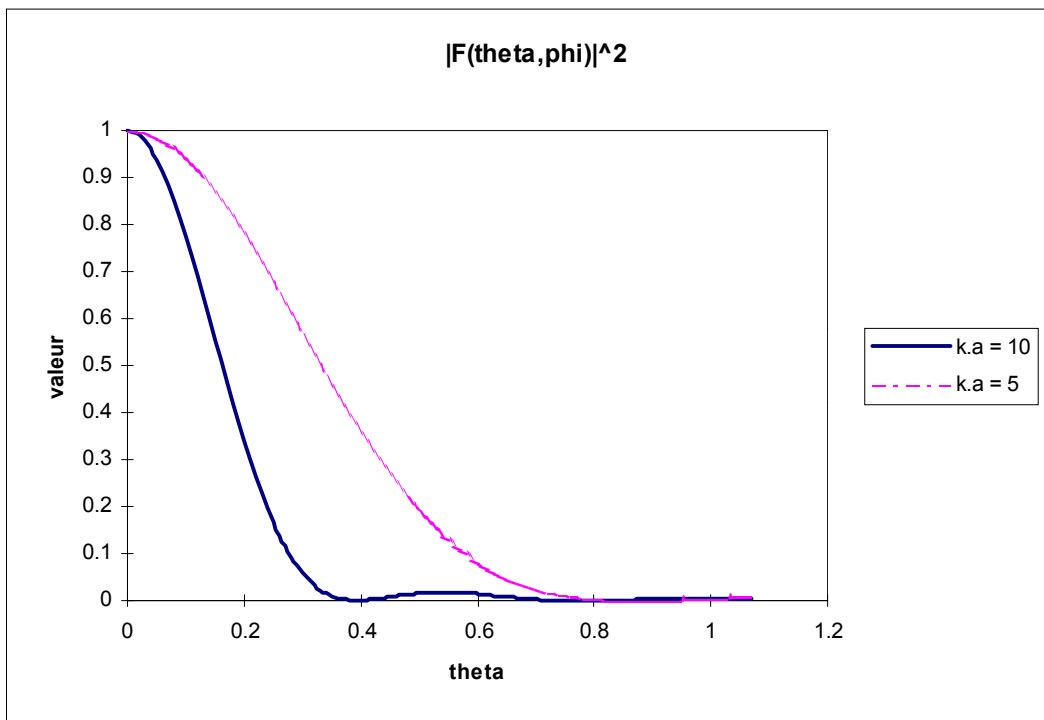


figure 5

Cette fonction, toujours égale à 1 pour θ nul, est d'autant plus large que la taille des particules est petite. L'intensité diffractée sur l'axe est proportionnelle au carré de la surface S .

3.3.2. Paradoxe d'extinction

En intégrant la diffraction dans les $2 \cdot \pi$ stéradians, on s'aperçoit que l'énergie totale diffractée correspond à l'énergie interceptée par la surface de la particule.

De plus, cette particule absorbe la portion de l'onde qui la rencontre. Il en résulte le paradoxe selon lequel une particule retire à l'onde incidente, deux fois l'énergie que sa surface peut intercepter (une fois par diffraction, une seconde fois par absorption).

3.3.3. Diffraction de deux sphères

Choisissons toujours $k.a = 5$, mais plaçons deux sphères à une distance égale à 10 dans la même unité. En intégrant l'équation 4, nous obtenons la figure 6 suivante :

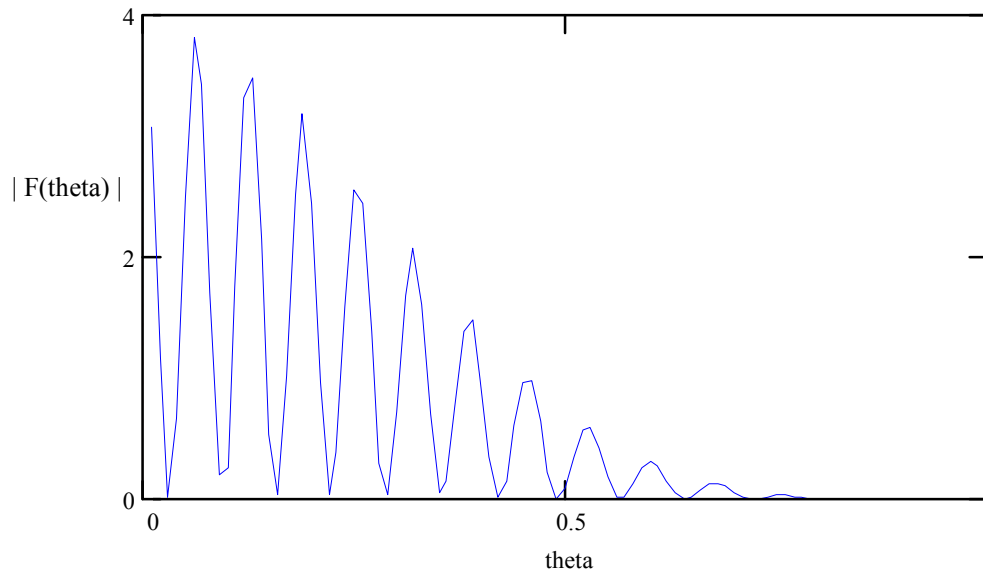


figure 6

Nous remarquons des interférences, dont la période est inversement proportionnelle à leur distance relative, dans la figure de diffraction résultante. Mais la valeur lissée est bien égale au double de la courbe correspondante ($k.a = 5$) de la figure 5. Ce résultat respecte la conservation de l'énergie.

En généralisant à N particules de taille identique, tant qu'il n'y a pas de diffusion multiple, nous obtiendrons une courbe dont l'amplitude moyenne est N fois l'amplitude de la courbe correspondant à une particule, avec des effets d'interférences aléatoires dues aux positions relatives aléatoires de ces particules.

Pour cette raison, un granulomètre laser ne donne de bons résultats que sur des moyennes obtenues sur des particules en mouvement ou sur de multiples acquisitions dans des positions de particules différentes.

Pour s'assurer qu'il n'y a pas de diffusion multiple, il faut que l'intensité totale diffractée soit proportionnelle à la quantité d'échantillon interceptant le faisceau. Un critère admis est que l'extinction totale du faisceau ne doit pas dépasser 10 %, ce qui signifie, compte tenu du paradoxe d'extinction, que la surface totale des particules occultant le faisceau ne doit pas dépasser 5%. Cela correspond à une distance moyenne entre particules supérieure ou égale à 4 fois leur diamètre.

3.3.4. Granulométrie par mesure de la diffraction d'un mélange de plusieurs sphères de tailles différentes

Les granulomètres laser utilisent la diffraction à l'infini (dite de Fraunhofer) observée au foyer d'une lentille convergente. Les formules que nous venons de voir peuvent être utilisées en faisant tendre R_0 vers l'infini. Lorsque nous observons la diffraction de sphères de tailles différentes, nous obtenons une combinaison linéaire des figures élémentaires de diffraction pour une particule.

Ainsi, en mesurant la figure de diffraction résultante, nous pouvons en déduire les proportions de particules pour chaque diamètre considéré.

En effet, calculons, pour chaque diamètre, les valeurs de la figure de diffraction en fonction de θ que nous placerons dans des vecteurs (un vecteur par diamètre). Plaçons ensuite ces vecteurs dans une matrice M , chacune de ses colonnes étant un vecteur calculé précédemment.

Soit S le vecteur mesuré.

Soit P le vecteur « quantité d'échantillon pour chaque diamètre »

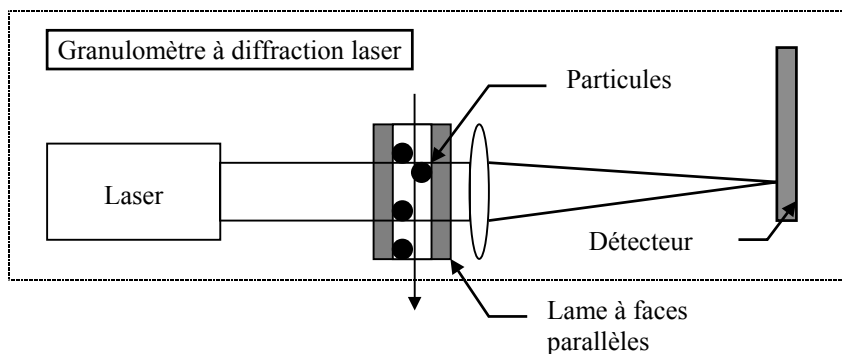
Nous pouvons écrire :

$$[M] \cdot \vec{P} = \vec{S}$$

La solution est

$$\vec{P} = [M]^{-1} \cdot \vec{S}$$

Le banc optique permettant une telle mesure est le suivant :



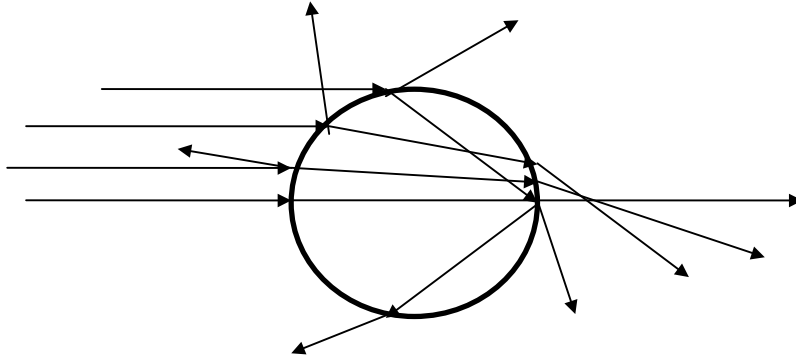
La figure de diffraction est observée par le détecteur placé au foyer d'une lentille convergente ce qui revient à mesurer la diffraction à l'infini.

La lentille convergente peut être placée, en fonction du besoin, avant ou après l'échantillon de particules.

3.3.5. Avantages et limites du modèle de diffraction

Tenir compte de la seule diffraction est une simplification admissible pour des tailles d'échantillon nettement supérieures à la longueur d'onde et pour des échantillons opaques, ce qui est le cas généralement.

Une amélioration peut être obtenue pour la mesure de sphères transparentes en ajoutant à la modélisation par diffraction, les lois d'optique géométrique. En effet, pour plus de rigueur, il est bon de tenir compte de la partie réfractée de l'onde dans la particule comme le montre le schéma suivant. On peut également faire intervenir les lois de polarisation à chaque réflexion sur le dioptre.



Pour cela, il faut connaître l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption de la matière des particules.

Une méthode plus rigoureuse consiste à modéliser la diffusion par la théorie de Mie qui, en exploitant les équations de Maxwell, permet un calcul précis de la diffusion d'une onde par des particules dont la taille peut être bien en dessous de la longueur d'onde.

4. Diffusion de lumière

Les mesures de particules de faible taille par rapport à la longueur d'onde nécessitent une modélisation rigoureuse. Pour cela, nous utiliserons les équations de Maxwell qui caractérisent les phénomènes électromagnétiques observables. Préalablement, nous rappelons quelques définitions et règles de calcul vectoriel.

4.1. Rappel de définitions de calcul vectoriel

4.1.1. Gradient

Le gradient d'une fonction $V(x,y,z)$ est un vecteur s'exprimant :

$$\text{grad}(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

4.1.2. Divergence

La divergence d'un champ E est un scalaire s'exprimant :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

4.1.3. Laplacien

Le Laplacien d'une fonction $V(x,y,z)$ est un scalaire s'exprimant :

$$\Delta(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Le Laplacien d'un champ E est un vecteur s'exprimant :

$$\Delta(\vec{E}) = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}; \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}; \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right)$$

4.1.4. Rotationnel

Le rotationnel d'un champ E est un vecteur selon l'expression suivante :

$$\text{rot}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}; \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}; \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

4.1.5. Relations communes

$$\Delta(V) = \text{div}(\text{grad}(V))$$

$$\Delta(\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{E}))$$

$$\text{rot}(\text{grad}(\vec{V})) = 0$$

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{V})) = 0$$

Théorème de Stokes :

La circulation d'un champ E sur le contour fermé C est égale au flux du rotationnel de E à travers toute surface S s'appuyant sur ce contour.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{E}) \cdot \vec{n} \cdot dx \cdot dy$$

Théorème d'Ostrogradski :

Le flux d'un champ E à travers une surface fermée S de volume V est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ dans le volume V .

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dx \cdot dy = \iiint_V \text{div}(\vec{E}) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

4.2. Les équations de Maxwell

Les 4 équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div}(\vec{D}) = \rho$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{rot}(\vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{rot}(\vec{H}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$$

E est le champ électrique, D est le champ induction électrique.

H est le champ magnétique, B est le champ induction magnétique.

ρ est la densité volumique de charge électrique.

j est la densité de courant.

- La première équation exprime la loi de Gauss.
- La deuxième équation exprime le fait qu'on ne peut isoler de masse magnétique positive ou négative.
- La troisième équation exprime la loi d'induction de Faraday.
- La quatrième équation exprime le théorème d'ampère.

En posant pour un milieu isotrope :

- ϵ permittivité.
- μ perméabilité magnétique.
- σ conductivité.

De plus :

Si le milieu est soumis à un champ électrique permanent, il y a apparition d'une polarisation électrique P .

Si le milieu est soumis à un champ magnétique permanent, il y a aimantation dont l'intensité est M (souvent proportionnel à H).

Nous pouvons alors écrire :

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

En négligeant les effets de polarisation électrique ces équations deviennent :

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

4.3. Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu sans charge électrique spatiale et sans courant.

Compte tenu de ce qui précède, les 4 équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\text{div}(\vec{H}) = 0$$

$$\text{rot}(\vec{E}) + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

$$\text{rot}(\vec{H}) - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Les deux dernières équations peuvent être écrites sous la forme :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) + \mu \cdot \text{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) - \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

on en déduit

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) + \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

or nous avons vu que

$$\Delta(\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{E}))$$

comme

$$\text{div}(\vec{E}) = 0$$

nous obtenons :

$$\Delta(\vec{E}) = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

propagation d'une onde se propageant à la vitesse v avec

nous obtenons l'équation différentielle de

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$$

dans le vide, la vitesse est c telle que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

Dans la plupart des milieux, μ est très proche de μ_0 . Dans ce cas, l'indice de réfraction s'écrit :

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

Le même raisonnement peut être appliqué à H.

4.4. Modélisation rigoureuse de diffusion : Théorie de Mie

4.4.1. Propagation des ondes

Reprenons les équations de Maxwell en utilisant les constantes ε , μ et σ , et en supposant que μ proche de μ_0 :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\operatorname{div}(\vec{H}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Sachant que E et H sont des ondes, utilisons la notation complexe.

Nous appellerons ω la pulsation (ou fréquence circulaire).

Les deux dernières équations deviennent :

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -i \cdot \mu \cdot \omega \cdot \vec{H} \quad (5)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = (i \cdot \varepsilon \cdot \omega + \sigma) \cdot \vec{E}$$

ou encore

$$\text{avec } m^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \frac{i \cdot \sigma}{\omega \cdot \varepsilon_0}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -i \cdot \mu \cdot c \cdot k \cdot \vec{H}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = i \cdot \frac{k}{\mu \cdot c} \cdot m^2 \cdot \vec{E}$$

m est l'indice complexe de réfraction à la fréquence circulaire ω . Il comprend un terme réel qui est l'indice de réfraction habituel, et un terme imaginaire qui est une absorption. Ce terme imaginaire dépend de la conductivité. Si la conductivité est nulle, alors l'indice imaginaire est nul.

Par le même raisonnement que celui que nous avons adopté, et en supposant que $\rho=0$ au § 4.3, nous obtenons :

$$\Delta(\vec{E}) = -k^2 \cdot m^2 \cdot \vec{E}$$

$$\Delta(\vec{H}) = -k^2 \cdot m^2 \cdot (\vec{H})$$

En supposant une propagation le long de l'axe des z, le champ aura la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i.k.m.z+i.\omega.t}$$

Cela montre que $k.m$ est la constante de propagation dans le milieu et que λ/m est la longueur d'onde dans le milieu.

4.4.2. Conditions aux limites

Considérons le passage de l'onde d'un milieu 1 caractérisé par $\epsilon_1, \sigma_1, m_1$, à un milieu 2 caractérisé par $\epsilon_2, \sigma_2, m_2$.

Le groupe d'équations (5) permet d'obtenir pour les composantes tangentiels à la surface de séparation :

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0$$

$$\vec{H}_{T2} - \vec{H}_{T1} = 0$$

pour les composantes normales, nous obtenons :

$$m_2^2 \cdot \vec{E}_{N2} - m_1^2 \cdot \vec{E}_{N1} = 0$$

$$\vec{H}_{N2} - \vec{H}_{N1} = 0$$

4.4.3. Solution de Mie

4.4.3.1. Solution du vecteur d'onde

Soit un point P défini selon la figure 7 en coordonnées polaires :

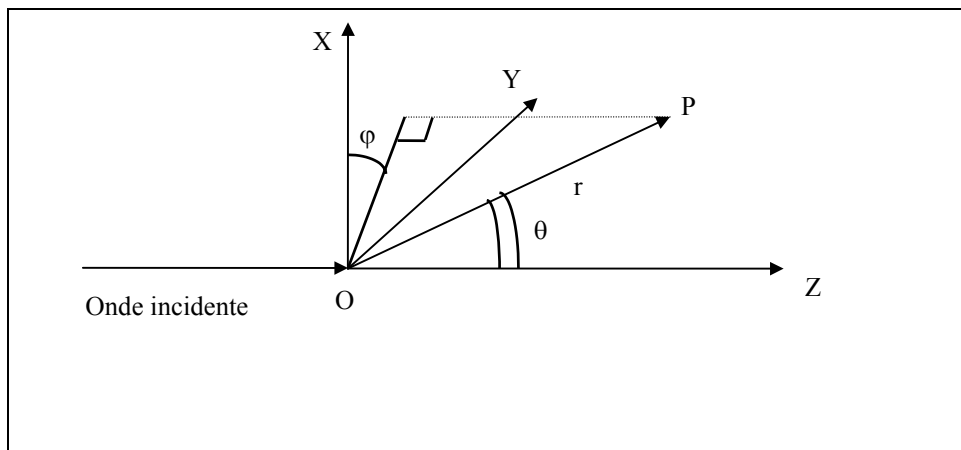


figure 7

Dans ce système de coordonnées, l'équation d'onde scalaire suivante

$$\Delta(\psi) + k^2 \cdot m^2 \cdot \psi = 0$$

a pour solutions élémentaires

$$\psi_{l,n} = \begin{Bmatrix} \cos(l\varphi) \\ \sin(l\varphi) \end{Bmatrix} P_n^l(\cos(\theta)) \cdot z_n(m \cdot k \cdot r)$$

où l et n sont des entiers tels que

$$n \geq l \geq 0$$

Le premier terme est soit un cosinus, soit un sinus.

Le deuxième est un polynôme de Legendre.

Le troisième est une fonction de Bessel sphérique quelconque telle que

$$z(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot x}} Z_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

La solution générale est une combinaison linéaire de ces solutions.

4.4.3.2. Résultats en tenant compte des conditions aux limites

En appliquant les formules au problème de Mie considérant la diffusion d'une onde plane rencontrant une sphère homogène, nous obtenons la solution suivante :

En tenant compte de la polarisation nous utiliserons les formules de dispersion complexe. Elles font intervenir deux fonctions complexes d'amplitude de diffusion : $S_1(\theta)$ et $S_2(\theta)$.

Le champ électrique se décompose en deux polarisations :

E_r polarisé perpendiculairement au plan de diffusion.
 E_t polarisé dans le plan de diffusion.

L'expression de la diffusion est :

$$E_r = S_1(\theta) \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} \cdot E_{r0}$$

$$E_t = S_2(\theta) \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} \cdot E_{t0}$$

E_{r0} et E_{t0} sont les champs incidents.

L'intensité est alors pour une onde incidente non polarisée :

$$I = I_0 \frac{1}{2 \cdot k^2 \cdot r^2} (i_1 + i_2) \quad (6)$$

ou si l'onde est polarisée rectilignement suivant Ox.

$$I = I_0 \frac{1}{k^2 \cdot r^2} (i_1 \cdot \sin^2(\varphi) + i_2 \cdot \cos^2(\varphi)) \quad (7)$$

avec :

$$i_1 = |S_1(\theta)|^2 \quad i_2 = |S_2(\theta)|^2$$

Les fonctions d'amplitude S1 (perpendiculaire au plan de diffusion) et S2 (dans le plan de diffusion) ont la forme suivante :

$$S_1(\theta) = \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos(\theta)) + b_n \tau_n(\cos(\theta))]$$

$$S_2(\theta) = \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos(\theta)) + a_n \tau_n(\cos(\theta))]$$

les facteurs d'amplitude a_n et b_n ont la forme suivante :

$$\text{posons : } x = k \cdot a = \frac{2\pi a}{\lambda} \quad \text{et } y = m \cdot x$$

$$a_n = \frac{\psi'_n(y) \cdot \psi_n(x) - m \cdot \psi_n(y) \cdot \psi'_n(x)}{\psi'_n(y) \cdot \zeta_n(x) - m \cdot \psi_n(y) \cdot \zeta'_n(x)}$$

$$b_n = \frac{m \cdot \psi'_n(y) \cdot \psi_n(x) - \psi_n(y) \cdot \psi'_n(x)}{m \cdot \psi'_n(y) \cdot \zeta_n(x) - \psi_n(y) \cdot \zeta'_n(x)}$$

avec :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi \cdot x}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$C_n(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi \cdot x}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$$

$$\zeta_n(x) = \psi_n(x) + i \cdot C_n(x)$$

$$\psi'_n(x) = \frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x}$$

$$\zeta'_n(x) = \frac{\partial \zeta_n(x)}{\partial x}$$

les facteurs angulaires π_n et τ_n ont la forme suivante :

$$\pi_n(\cos(\theta)) = \frac{1}{\sin(\theta)} \cdot P_n^1(\cos(\theta))$$

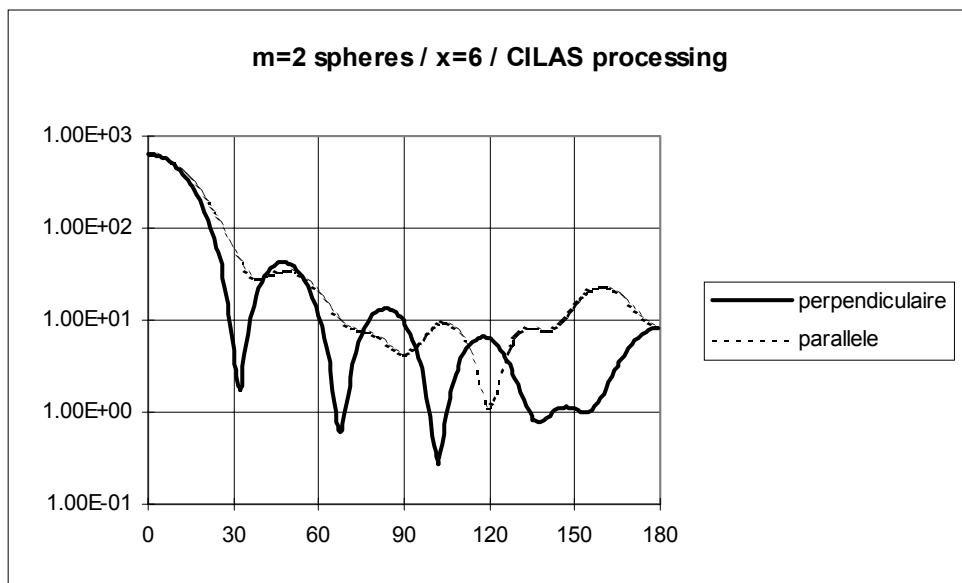
$$\tau_n(\cos(\theta)) = \frac{d}{d\theta} \cdot P_n^1(\cos(\theta))$$

P_n^l étant le polynôme de Legendre de degré n .

4.5. Application à la mesure de particules de petite taille par rapport à la longueur d'onde - Influence du modèle sur les résultats.

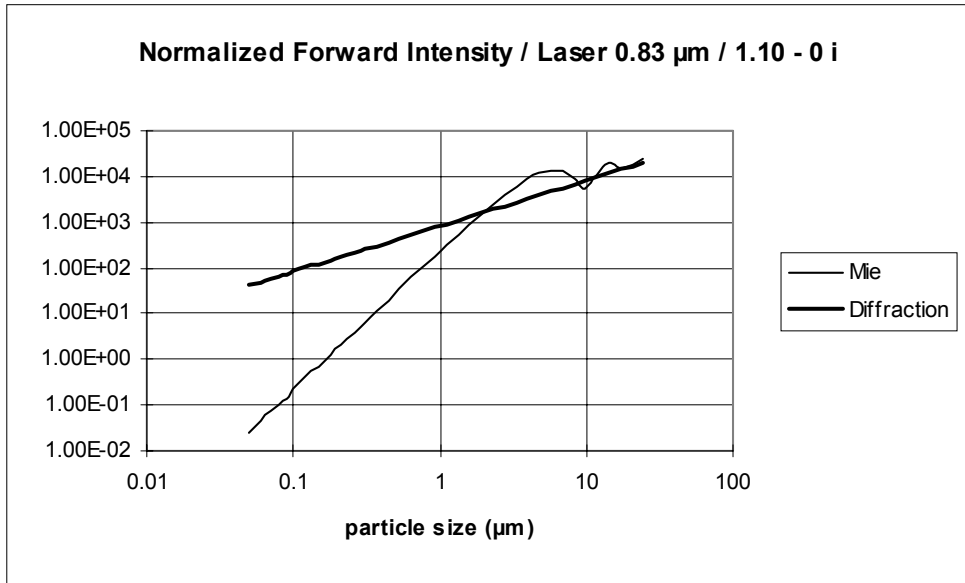
Lorsque les particules sont de petite taille comparable ou inférieure à la longueur d'onde, la théorie de la diffraction ne suffit plus et nous devons appliquer la théorie de Mie.

Nous présentons ici des calculs effectués avec $k.a = 6$, et un indice complexe $m = 2 - 0 i$



Nous remarquons la différence de résultat suivant la polarisation

Comparons la diffusion d'un volume constant de particules pour θ proche de zéro, en fonction de la taille, selon les modèles de diffraction et de la théorie de Mie. L'indice est $m = 1.10 - 0 i$



Nous remarquons combien l'intensité devient faible en théorie de Mie pour les petits diamètres, et les oscillations (physiquement réelles) qui apparaissent avec la théorie de Mie.

Observons la diffusion d'un volume constant de particules pour θ proche de zéro, en fonction de la taille, selon les modèles de diffraction et de la théorie de Mie. L'indice est cette fois $m = 1.54 - 0 i$

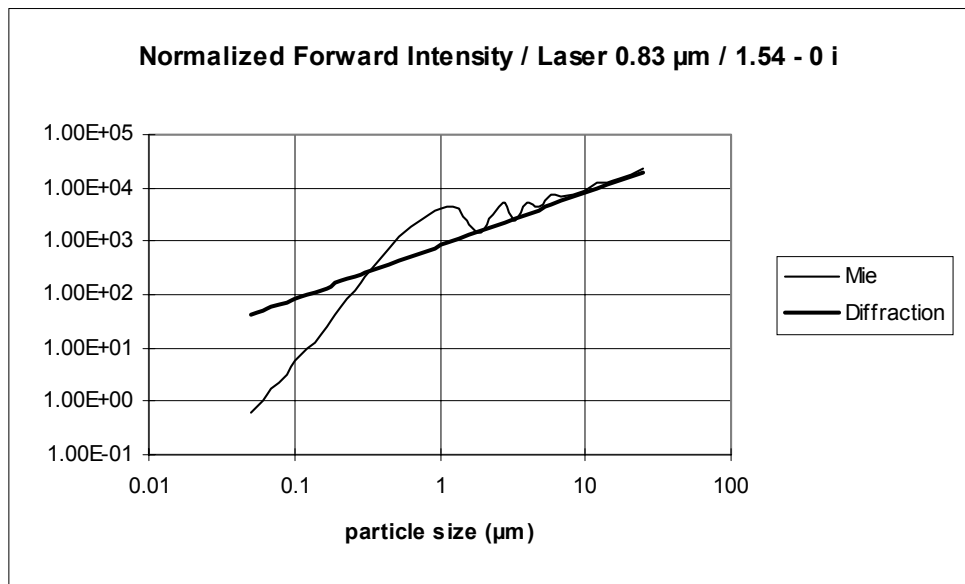
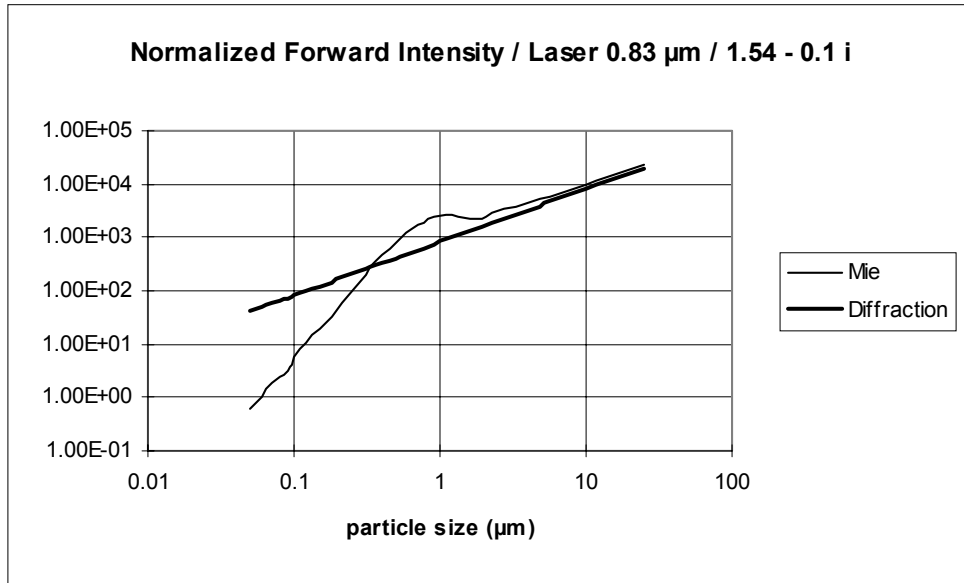


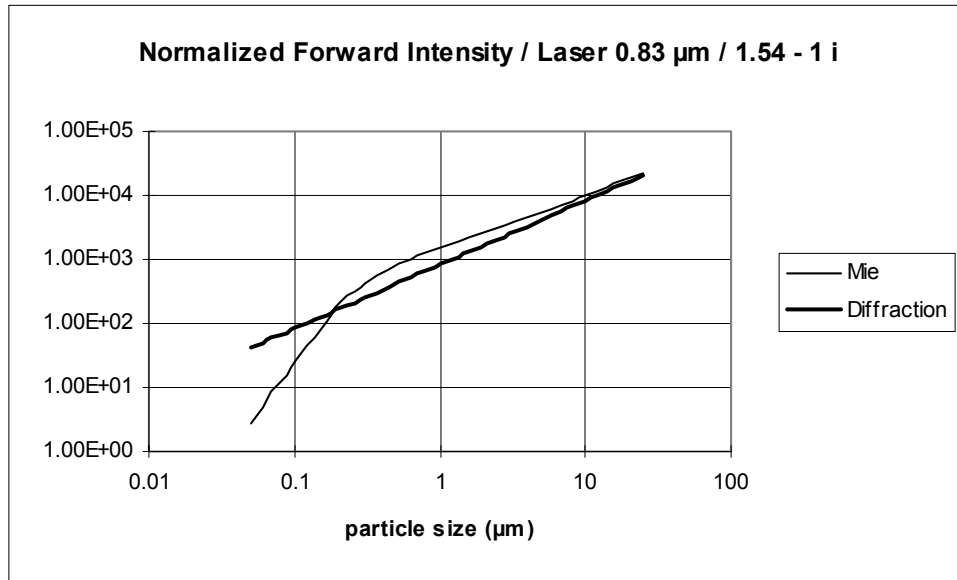
Fig.8

Nous voyons combien l'indice influe significativement sur le résultat du modèle. Augmentons maintenant l'indice imaginaire (absorption) avec $m = 1.54 - 0.1 i$



Nous remarquons que les oscillations diminuent.

Augmentons l'indice imaginaire (absorption) avec $m = 1.54 - 1 i$



Les oscillations ont disparu.

Cela montre l'importance du modèle. En particulier, on remarquera que plus l'indice imaginaire est faible, plus la différence est significative pour les fines particules entre la théorie de la diffraction et la théorie de Mie.

Ainsi, pour une même mesure de diffusion, l'utilisation de la théorie de Mie donnera une granulométrie contenant plus de particules de petite taille que ce que nous aurions obtenu par la théorie de la diffraction.

Compte tenu de l'importance de ce modèle, CILAS a étudié un algorithme rapide qui permet aux utilisateurs d'obtenir en quelques secondes les modèles de diffusion par la théorie de Mie tenant compte de l'indice complexe de leur échantillon.

4.6. Théorie de Rayleigh.

Lorsque les particules ont une taille inférieure à 0,03 longueur d'onde, la théorie de Rayleigh représente correctement la diffusion de lumière.

Une particule de très petite taille placée dans un champ électrique E_0 se polarise et modifie ainsi le champ interne et périphérique à la particule. Appelons p le moment du dipôle induit, nous obtenons la relation :

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}_0$$

α étant la polarisabilité de la particule, α est proportionnel au volume de la particule.

Si le champ incident oscille ($E = E_0 \cdot e^{i\omega t}$), alors le dipôle oscille également et rayonne à son tour dans toutes les directions. Ce type de diffusion est la diffusion de Rayleigh.

Dans le cas où la polarisabilité est isotrope, les fonctions d'amplitude S_1 (perpendiculaire au plan de diffusion) et S_2 (dans le plan de diffusion) sont les suivantes :

$$S_1(\theta) = i \cdot k^3 \cdot \alpha$$

$$S_2(\theta) = i \cdot k^3 \cdot \alpha \cdot \cos(\theta)$$

Ces équations montrent que la lumière est totalement polarisée pour $\theta = 90^\circ$.

Par l'équation (6) nous en déduisons, si l'onde incidente est non polarisée :

$$I = \frac{(1 + \cos^2(\theta)) \cdot k^4 \cdot |\alpha|^2}{2 \cdot r^2} \cdot I_0$$

La diffusion est inversement proportionnelle à λ^4 et proportionnelle au volume au carré de la particule (α étant proportionnel au volume de la particule)

Nous remarquons que l'allure du diagramme de diffusion ne dépend pas de la taille des particules. Une augmentation de diffusion peut être soit due à une augmentation du nombre de particules, soit à une augmentation de la taille de chacune. Nous ne pouvons donc pas déterminer de granulométrie par cette analyse sauf en l'utilisant pour mesurer d'autres effets comme le mouvement brownien.

5. CONCLUSION

Les techniques en progrès permanent du laser, de l'informatique associées aux théories sur la diffusion de lumière ont permis de réaliser des appareils de mesure performants et rapides pour l'analyse granulométrique des poudres.

Les demandes des utilisateurs vont toujours vers plus de dynamique de mesure et de précision.

Cela nécessite aussi une bonne connaissance des caractéristiques optiques des matériaux à mesurer.

Grâce aux progrès techniques, les granulomètres exploitant la théorie de la diffraction et la théorie de Mie permettent une étendue de mesure allant de $0,05 \mu\text{m}$ à plusieurs millimètres en quelques secondes.

Ces équipements sont maintenant très répandus dans les industries utilisant ou fabriquant des poudres.